Федеральное агентство по образованию РФ

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

Д. Г. Орловский

Уравнения математической физики. Приведение к каноническому виду

**Методические рекомендации
к практическим занятиям**

Москва 2009

УДК 517.958
ББК 22.311я7
О – 66

Орловский Д. Г. Уравнения математической физики. Приведение к каноническому виду. Методические рекомендации к практическим занятиям. М.: МИФИ, 2009. 36 с.

В рекомендациях подробно рассматриваются вопросы приведения уравнения к каноническому виду линейным преобразованием независимых переменных и приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными методом характеристик.

Предназначены для студентов пятого семестра МИФИ факультетов ЭТФ и ВФК, но могут быть использованы преподавателями и студентами других факультетов.

Рецензент Муравьев С.Е.

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

Оглавление

1. Приведение к каноническому виду линейным преобразованием независимых переменных

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка с n независимыми переменными и симметричной матрицей $A = (a_{ij})$

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + d(x) = 0 \qquad (1.1)$$

$(x = (x_1, \ldots, x_n))$.

Определение. Уравнение (1.1) имеет канонический вид, если матрица A диагональна и все диагональные элементы равны либо 1, либо -1, либо 0.

Определение. Характеристической формой уравнения (1.1) называется квадратичная форма

$$Q(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j. \qquad (1.2)$$

Из курса линейной алгебры известно, что линейным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} \widetilde{\xi}_1 \\ \ldots \\ \widetilde{\xi}_n \end{pmatrix}$$

форму Q можно привести к нормальному виду

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, \widetilde{\xi}^{\,2},$$

где все коэффициенты ε_i равны либо 1, либо -1, либо 0.

Приведение уравнения (1.1) к каноническому виду тесно связано с приведением характеристической формы (1.2) к нормальному виду.

Сделаем в уравнении (1.1) линейную замену независимых переменных с матрицей перехода T:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \dots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы перехода будем обозначать t_{ij}. Элементы обратной матрицы T^{-1} обозначим $t_{ij}^{(-1)}$, а элементы транспонированной матрицы T^* обозначим t_{ij}^* ($t_{ij}^* = t_{ji}$). В этом случае

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \dots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

так, что

$$\widetilde{x}_k = t_{k1}^{(-1)} x_1 + \ldots + t_{kn}^{(-1)} x_n.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \widetilde{x}_x}{\partial x_i} = t_{ki}^{(-1)}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \, \frac{\partial \widetilde{x}_k}{\partial \widetilde{x}_i} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k}. \tag{1.3}$$

Еще раз применяя правило дифференцирования сложной функции, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_m} \left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \right) \frac{\partial \widetilde{x}_m}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m} \, t_{mj}^{(-1)} = \sum_{k,\, m=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} t_{mj}^{(-1)} \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m}. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.3) и (1.4) в уравнение (1.1) и учитывая, что

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k,\, m=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} t_{mj}^{(-1)} \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m} =$$

$$= \sum_{k,\, m=1}^{n} \left(\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} t_{ki}^{(-1)} t_{mj}^{(-1)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m},$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} b_i \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} \right),$$

приходим к следующему уравнению

$$\sum_{k,\, m=1}^{n} \widetilde{a}_{km} \frac{\partial^2 u}{\partial \widetilde{x}_k \partial \widetilde{x}_m} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{b}_k \frac{\partial u}{\partial \widetilde{x}_k} + cu + d = 0, \quad (1.5)$$

где

$$\widetilde{a}_{km} = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} t_{ki}^{(-1)} t_{mj}^{(-1)}, \quad (1.6)$$

$$\widetilde{b}_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ki}^{(-1)} b_i. \quad (1.7)$$

Эти формулы легко переписать в матричном виде. Введем, кроме матрицы A исходного уравнения, матрицу $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ нового уравнения, а также векторы

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\widetilde{b}} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \dots \\ \widetilde{b}_n \end{pmatrix},$$

составленные из коэффициентов при первых производных. Нетрудно видеть, что формулы (1.6) и (1.7) принимают следующий вид:

$$\widetilde{A} = T^{-1} A \left(T^{-1}\right)^*, \tag{1.8}$$

$$\overrightarrow{\widetilde{b}} = T^{-1} \overrightarrow{b}. \tag{1.9}$$

Теперь, перейдем к основному вопросу: как привести уравнение к каноническому виду? Несложно убедиться в следующем: если матрица $\mathcal{T}$ приводит характеристическую форму Q к нормальному виду, тогда матрица

$$T = \left(\mathcal{T}^{-1}\right)^* \tag{1.10}$$

приводит уравнение (1.1) к каноническому виду.

В самом деле, из курса линейной алгебры известно, что матрица $\mathcal{A}$ квадратичной формы Q в новых координатах вычисляется по формуле:

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}^* A \mathcal{T}.$$

Матрица нового уравнения определяется формулой (1.8). Так как операции взятия обратной матрицы и транспонирования перестановочны, то

$$\widetilde{A} = T^{-1} A \left(T^{-1}\right)^* = \left(\left(\mathcal{T}^{-1}\right)^*\right)^{-1} A \left(\left(\left(\mathcal{T}^{-1}\right)^*\right)^{-1}\right)^* =$$

$$= \left(\left(\mathcal{T}^{-1}\right)^{-1}\right)^* A \left(\left(\left(\mathcal{T}^{-1}\right)^*\right)^*\right)^{-1} = \mathcal{T}^* A \left(\mathcal{T}^{-1}\right)^{-1} = \mathcal{T}^* A \mathcal{T} = \mathcal{A}.$$

Так как матрица $\widetilde{A}$ нового уравнения совпадает с матрицей $\mathcal{A}$ квадратичной формы нормального вида, то уравнение (1.5) имеет канонический вид.

2. Упрощение канонического уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение в канонической форме

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0, \tag{2.1}$$

где ε_i принимает значения 1, -1 или 0, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Здесь предполагаем, что все коэффициенты уравнения (за исключением величины d) являются постоянными. Сделаем в этом уравнении следующую замену неизвестной функции:

$$u(x) = v(x) e^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n} \tag{2.2}$$

и постараемся подобрать числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ так, чтобы по возможности упростить уравнение (2.1). Вычисляя производные произведения по формуле Лейбница, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} e^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n} + \alpha_i v e^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} e^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n} + 2\alpha_i \frac{\partial v}{\partial x_i} e^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n} +$$

$$+ \alpha_i^2 v e^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n}. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.2), (2.3) и (2.4) в (2.1) и умножая на

$$e^{-\alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_n x_n},$$

получаем следующее уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i + 2\varepsilon_i \alpha_i\right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left(c + \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i^2\right) v +$$

$$+de^{-\alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_n x_n} = 0, \tag{2.5}$$

Рассмотрим сначала случай, когда уравнение (2.1) имеет эллиптический или гиперболический тип. В этой ситуации все коэффициенты ε_i отличны от нуля. Полагая

$$\alpha_i = -\frac{b_i}{2\varepsilon_i}, \tag{2.6}$$

можно убрать все слагаемые, содержащие производные первого порядка. В результате получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \widetilde{c}v + \widetilde{d} = 0, \tag{2.7}$$

где

$$\begin{cases} \widetilde{c} = c - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{b_i^2}{4\varepsilon_i}, \\ \widetilde{d} = de^{-\alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_n x_n}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Ситуация немного усложняется для уравнения параболического типа. Так как один (и только один) из коэффициентов ε_i равен нулю, то при соответствующем значении индекса i формула (16) теряет смысл. Пусть, для определенности, значение $\varepsilon_1 = 0$, а все остальные ε_i отличны от нуля. Тогда определим величины $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ по формуле (2.6), а значение α_1 подберем так, чтобы был равен нулю коэффициент при неизвестной функции. Для этого нужно решить уравнение:

$$c + \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\alpha_i^2 = 0.$$

Так как $\varepsilon_1 = 0$, то, выделяя слагаемые содержащие α_1, видим, что это уравнение линейно относительно α_1:

$$c + b_1\alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i\alpha_i + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i\alpha_i^2 = 0. \tag{2.9}$$

Это уравнение требует дополнительного анализа, в зависимости от того равно нулю b_1 или не равно. При $b_1 \neq 0$ уравнение (2.9) имеет единственное решение

$$\alpha_1 = -\frac{1}{b_1}\left(c + \sum_{i=2}^{n} b_i\alpha_i + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i\alpha_i^2\right). \tag{2.10}$$

Таким образом, определяя значения α_i по формуле (2.6) при $i > 1$ и по формуле (2.10) при $i = 1$, получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \widetilde{b}\,\frac{\partial v}{\partial x_1} + \widetilde{d} = 0, \tag{2.11}$$

не содержащее слагаемое с неизвестной функцией.

При $b_1 = 0$ ситуация разрешается по-другому. Определим при $i > 1$ значения α_i по формуле (2.6), а α_1 положим равным нулю (впрочем, можно выбрать и любое другое значение). Тогда в уравнении (2.5) будут отсутствовать все слагаеме, содержащие производные первого порядка. При $i > 1$ – в силу формул (2.6), а при $i = 1$ в силу того, что и $b_1 = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$. В результате получим уравнение следующего вида

$$\sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \widetilde{c}v + \widetilde{d} = 0. \tag{2.12}$$

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение

$$2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0.$$

Характеристическая форма

$$Q = 2\xi\eta - 4\eta^2 = -\left(\frac{1}{2}\,\xi - 2\eta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,\xi\right)^2.$$

Перейдем к переменным

$$\begin{cases} \widetilde{\xi} = \dfrac{1}{2}\,\xi; \\ \widetilde{\eta} = \dfrac{1}{2}\,\xi - 2\eta. \end{cases}$$

Тогда

$$Q = \widetilde{\xi}^{\,2} - \widetilde{\eta}^{\,2}.$$

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T = \left(\mathcal{T}^{-1}\right)^* = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

В координатах

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\,\widetilde{x} + \dfrac{1}{2}\,\widetilde{y}; \\ y = -2\widetilde{y}, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \widetilde{x} = 2x + \dfrac{1}{2}\,y; \\ \widetilde{y} = -\dfrac{1}{2}\,y. \end{cases}$$

Вектор, составленный из коэффициентов при первых производных,

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор

$$\overrightarrow{\widetilde{b}} = T^{-1}\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выражая в исходном уравнении x через $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$, получаем каноническое уравнение

$$u_{\widetilde{x}\widetilde{x}} - u_{\widetilde{y}\widetilde{y}} + u_{\widetilde{x}} + u_{\widetilde{y}} + u + \frac{1}{2}\,\widetilde{x} + \frac{1}{2}\,\widetilde{y} = 0.$$

Для дальнейшего упрощения можно воспользоваться формулами (2.1) – (2.8). Применительно к уравнению (2.1) $n = 2$, $x_1 = \widetilde{x}$, $x_2 = \widetilde{y}$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $c = 1$, $d = (\widetilde{x} + \widetilde{y})/2$. По формуле (2.6) находим $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = 1/2$ и после замены

$$u = v\, e^{(\widetilde{y} - \widetilde{x})/2}$$

получаем

$$v_{\widetilde{x}\widetilde{x}} - v_{\widetilde{y}\widetilde{y}} + v + \frac{1}{2}(\widetilde{x} + \widetilde{y})e^{(\widetilde{x} - \widetilde{y})/2} = 0.$$

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$$

Характеристическая форма

$$Q = \xi^2 - 6\xi\eta + 9\eta^2 = (\xi + 3\eta)^2 = \widetilde{\xi}^{\,2},$$

где $\widetilde{\xi} = \xi + 3\eta$. Так как Q содержит только один полный квадрат, то вторую переменную $\widetilde{\eta}$ можно выбрать произвольно (лишь бы преобразование координат было обратимо). Проще всего взять $\widetilde{\eta} = \eta$. Таким образом,

$$\begin{cases} \widetilde{\xi} = \xi + 3\eta; \\ \widetilde{\eta} = \eta. \end{cases}$$

Это дает

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \left(\mathcal{T}^{-1}\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор, составленный из коэффициентов при первых производных,

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор

$$\overrightarrow{\widetilde{b}} = T^{-1}\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Каноническое уравнение

$$u_{\widetilde{x}\widetilde{x}} - u_{\widetilde{x}} + 5u_{\widetilde{y}} = 0.$$

Для дальнейшего упрощения удобно считать, что $x_1 = \widetilde{y}$, а $x_2 = \widetilde{x}$. Тогда именно $\varepsilon_1 = 0$. Далее, $\varepsilon_2 = 1$, $b_1 = 5$, $b_2 = -1$, $c = 0$, $d = 0$. Сначала по формуле (2.6) находим $\alpha_2 = 1/2$, а затем по формуле (2.10) вычисляем $\alpha_1 = 1/20$. Делая замену

$$u = v\, e^{(10\widetilde{x} + \widetilde{y})/20},$$

приходим к уравнению

$$v_{\widetilde{x}\widetilde{x}} + 5v_{\widetilde{y}} = 0.$$

Пример 2.3. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0.$$

Характеристическая форма

$$Q = \xi^2 + 2\xi\eta + 2\eta^2 + 4\eta\zeta + 5\zeta^2 =$$

$$= (\xi + \eta)^2 + (\eta + 2\zeta)^2 + \zeta^2 = \widetilde{\xi}^{\,2} + \widetilde{\eta}^{\,2} + \widetilde{\zeta}^{\,2},$$

где

$$\begin{cases} \widetilde{\xi} = \xi + \eta; \\ \widetilde{\eta} = \eta + 2\zeta; \\ \widetilde{\zeta} = \zeta, \end{cases}$$

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T = \left(\mathcal{T}^{-1}\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как в уравнении отсутствуют слагаемые с первыми производными, то матрица, обратная к T, не нужна. Преобразование коодинат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x = \widetilde{x}; \\ y = \widetilde{x} + \widetilde{y}; \\ z = 2\widetilde{y} + \widetilde{z}, \end{cases}$$

а уравнение в каноническом виде

$$u_{\widetilde{x}\widetilde{x}} + u_{\widetilde{y}\widetilde{y}} + u_{\widetilde{z}\widetilde{z}} = 0.$$

Пример 2.4. Рассмотрим уравнение

$$u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0.$$

Характеристическая форма

$$Q = \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta.$$

Так как Q не содержит квадратов переменных, то сначала нужно выполнить вспомогательное преобразование:

$$\begin{cases} \xi = \widetilde{\xi} + \widetilde{\eta}; \\ \eta = \widetilde{\xi} - \widetilde{\eta}; \\ \zeta = \widetilde{\zeta}. \end{cases}$$

В результате получим, что

$$Q = \widetilde{\xi}^{\,2} - \widetilde{\eta}^{\,2} + 2\,\widetilde{\xi}\widetilde{\zeta} = (\widetilde{\xi} + \widetilde{\zeta})^2 - \widetilde{\eta}^{\,2} - \widetilde{\zeta}^{\,2} = \xi'^{\,2} - \eta'^{\,2} - \zeta'^{\,2},$$

где

$$\begin{cases} \xi' = \widetilde{\xi} + \widetilde{\zeta}; \\ \eta' = \widetilde{\eta}; \\ \zeta' = \widetilde{\zeta}. \end{cases}$$

Из формул, определяющих вспомогательное преобразование, следует, что

$$\widetilde{\xi} + \widetilde{\zeta} = \xi, \quad \widetilde{\eta} = \frac{1}{2}\,(\xi - \eta),$$

следовательно, окончательная замена переменных имеет следующий вид

$$\begin{cases} \xi' = \xi; \\ \eta' = \dfrac{1}{2}\,\xi - \dfrac{1}{2}\,\eta; \\ \zeta' = \zeta. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T = \left(\mathcal{T}^{-1}\right)^{*} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование коодинат имеет следующий вид

$$\begin{cases} x = \widetilde{x} + \dfrac{1}{2}\,\widetilde{y}; \\ y = -\dfrac{1}{2}\,\widetilde{y}; \\ z = \widetilde{z}. \end{cases}$$

Матрица, обратная к T,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор, составленный из коэффициентов при первых производных,

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор

$$\overrightarrow{\widetilde{b}} = T^{-1}\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение в каноническом виде

$$u_{\widetilde{x}\widetilde{x}} - u_{\widetilde{y}\widetilde{y}} - u_{\widetilde{z}\widetilde{z}} - 2u_{\widetilde{y}} = 0.$$

Каноническое уравнение является достаточно простым. Однако, если бы вместо слагаемого, содержащего производную первого порядка, осталось слагаемое, содержащее неизвестную функцию, то оно было бы еще проще. Этого можно добиться с помощью упрощения канонического уравнения по формулам (2.1) – (2.8). Здесь $n = 3$, $x_1 = \widetilde{x}$, $x_2 = \widetilde{y}$, $x_3 = \widetilde{z}$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = -1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -2$, $b_3 = 0$, $c = 0$, $d = 0$. По формуле (2.6) находим $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 0$ и после замены

$$u = v\, e^{-\widetilde{y}}$$

получаем

$$v_{\widetilde{x}\widetilde{x}} - v_{\widetilde{y}\widetilde{y}} - v_{\widetilde{z}\widetilde{z}} + v = 0.$$

3. Приведение к каноническому виду уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим следующее уравнение:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + f(x,y,u,\partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0 \qquad (3.1)$$

в предположении, что в каждой точке хотя бы один из коэффициентов $a(x,y)$, $b(x,y)$ или $c(x,y)$ отличен от нуля (т. е. это уравнение действительно имеет второй порядок).

Для такого уравнения классификация по типу выглядит следующим образом: если $b^2 - ac > 0$, то уравнение (3.1) имеет гиперболический тип, случай $b^2 - ac = 0$ отвечает уравнению параболического типа, а при $b^2 - ac < 0$ имеем уравнение эллиптического типа.

Сделаем произвольную замену независимых переменных:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y); \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \tag{3.2}$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,\eta_x; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_y + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,\eta_y. \end{cases} \tag{3.3}$$

Вычисляя вторые производные, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\xi_x^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,\xi_x \eta_x + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\eta_x^2 + \\ + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_{xx} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,\eta_{xx}; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\xi_x \xi_y + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,\left(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x\right) + \\ + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\eta_x \eta_y + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_{xy} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,\eta_{xy}; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\xi_y^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,\xi_y \eta_y + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\eta_y^2 + \\ + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\,\xi_{yy} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,\eta_{yy}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.1), получаем уравнение

$$\widetilde{a}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\widetilde{b}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \widetilde{c}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} +$$

$$+\widetilde{f}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta) = 0, \tag{3.5}$$

в котором

$$\begin{cases} \widetilde{a} = a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_y^2; \\ \widetilde{b} = a\,\xi_x\eta_x + b\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\,\xi_y\eta_y; \\ \widetilde{c} = a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Функция $\widetilde{f}$ сейчас не представляет интереса и поэтому ее явный вид не нужен.

Проделав несложные выкладки, можно убедиться в том, что

$$\widetilde{b}^{\,2} - \widetilde{a}\,\widetilde{c} = (b^2 - ac)\left(\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)}\right)^2.$$

Отсюда следует, что при произвольной замене независимых переменных тип уравнения не меняется.

Рассмотрим приведение уравнения (3.1) к каноническому типу в том случае, когда оно имеет гиперболический тип ($b^2 - ac > 0$). На первом этапе приведем его к виду, в котором среди вторых производных присутствует только смешанная производная:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \widetilde{f}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta) = 0. \tag{3.7}$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $a \neq 0$. В самом деле, если одновременно $a = 0$ и $c = 0$, то из неравенства $b^2 - ac > 0$ следует, что $b \neq 0$ и после деления уравнения (3.1) на $2b$ оно принимает вид (3.7). Если же $c \neq 0$, то можно поменять переменные, заменив x на y, а y на x. В этом случае коэффициенты a и c меняются местами и нужное условие будет выполнено.

Для приведения уравнения (3.1) к виду (3.7) подберем новые переменные так, чтобы в (3.5) коэффициенты $\widetilde{a}$ и $\widetilde{c}$ были равны нулю. Из равенств (3.6) следует, что эти переменные должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_y^2 = 0; \\ a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2 = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Фактически эти два уравнения представляют собой одно:

$$a\,\varphi_x^2 + 2b\,\varphi_x\varphi_y + c\,\varphi_y^2 = 0. \tag{3.9}$$

В самом деле, если заменить в (3.9) φ на ξ, то получим первое уравнение в (3.8), а если заменить φ на η, то получим второе уравнение.

Уравнение (3.9) называется характеристическим уравнением для уравнения (3.1).

Разделив уравнение (3.9) на φ_y^2, получим квадратное уравнение:

$$a\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2b\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0,$$

решая которое, находим:

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Это приводит к двум линейным уравнениям в частных производных первого порядка:

$$a\varphi_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\varphi_y = 0,$$
$$a\varphi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\varphi_y = 0.$$

(При $\varphi_y = 0$ делить на φ_y^2 нельзя, однако в этой ситуации и уравнение (3.9), и полученная пара уравнений сводятся к одному и тому же равенству $\varphi_x = 0$, что говорит об их равносильности и в этом случае.)

Пусть ξ – решение первого из них, а η – решение второго, т. е.

$$\begin{cases} a\xi_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\xi_y = 0; \\ a\eta_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\eta_y = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

тогда обе функции $\varphi = \xi$ и $\varphi = \eta$ удовлетворяют уравнению (3.9), т. е. равенствам (3.8). Это означает, что после замены (3.2) уравнение (3.1) будет приведено к виду

$$\widetilde{b}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \widetilde{f}(\xi,\eta,u,\partial u/\partial\xi,\partial u/\partial\eta) = 0. \tag{3.11}$$

Так как при замене (3.2) тип уравнения не меняется, то $\widetilde{b}^{\,2} - \widetilde{a}\,\widetilde{c} > 0$, но $\widetilde{a}$ и $\widetilde{c}$ равны нулю, поэтому $\widetilde{b} \neq 0$ и, разделив уравнение (3.11) на $\widetilde{b}$, получим уравнение (3.7).

Отметим также, что для того, чтобы ξ и η можно было взять за новые переменные, они должны быть функционально независимы, т. е.

$$\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)} \neq 0.$$

Здесь можно сослаться на курс обыкновенных дифференциальных уравнений, в котором изучается уравнение

$$A(x,y)\varphi_x + B(x,y)\varphi_y = 0. \tag{3.12}$$

Решение уравнения (3.12) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{A(x,y)} = \frac{dy}{B(x,y)}. \tag{3.13}$$

Функция $\varphi(x, y)$ является решением уравнения (3.12) тогда и только тогда, когда она является первым интегралом уравнения (3.13). Если функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, причем всюду величина $A^2 + B^2 \neq \neq 0$, то уравнение (3.12), по крайней мере локально, имеет непрерывно дифференцируемое решение $\varphi(x, y)$, для которого всюду $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$.

Пусть имеется два таких уравнения

$$A_1(x, y)\xi_x + B_1(x, y)\xi_y = 0 \quad \text{и} \quad A_2(x, y)\eta_x + B_2(x, y)\eta_y = 0$$

и решения этих уравнений, для которых $\xi_x^2 + \xi_y^2 \neq 0$ и $\eta_x^2 + +\eta_y^2 \neq 0$. Если коэффициенты этих уравнений (A_1, B_1) и (A_2, B_2) не пропорциональны, то

$$\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)} \neq 0.$$

В самом деле, первое из этих уравнений равносильно ортогональности векторов $\{A_1, B_1\}$ и $\{\xi_x, \xi_y\}$, а второе уравнение равносильно ортогональности векторов $\{A_2, B_2\}$ и $\{\eta_x, \eta_y\}$. Так как векторы $\{A_1, B_1\}$ и $\{A_2, B_2\}$ не пропорциональны, то не пропорциональны и ортогональные им векторы $\{\xi_x, \xi_y\}$ и $\{\eta_x, \eta_y\}$. Следовательно, отличен от нуля и их определитель

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)}.$$

В таком случае $A_1 = a$, $B_1 = b - \sqrt{b^2 - ac}$, $A_2 = a$, $B_2 = = b + \sqrt{b^2 - ac}$. Определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b - \sqrt{b^2 - ac} \\ a & b + \sqrt{b^2 - ac} \end{vmatrix} = 2a\sqrt{b^2 - ac} \neq 0.$$

Следовательно, коэффициенты уравнений (3.10) не пропорциональны. Поэтому если брать решения этих уравнений с

$\xi_x^2 + \xi_y^2 \neq 0$ и $\eta_x^2 + \eta_y^2 \neq 0$, то функции ξ и η будут функционально независимы.

Второй этап состоит в преобразовании уравнения (3.7). Так как обозначение переменных является непринципиальным моментом, то для удобства вернемся к переменным x и y, а уравнение (3.7) представим в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0. \tag{3.14}$$

В этом уравнении сделаем замену

$$\begin{cases} \xi = x + y; \\ \eta = x - y. \end{cases} \tag{3.15}$$

По формулам (3.4) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Отсюда следует, что уравнение (3.14) преобразуется к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{f}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta) = 0. \tag{3.16}$$

Отметим, что формулы преобразования (3.15) второго этапа всегда одни и те же, независимо от рассматриваемого уравнения. Поэтому при приведении к каноническому виду уравнения гиперболического типа принято второй этап опускать, а уравнение (3.7) также считать каноническим, наряду с уравнением (3.16). Подчеркнем, что это исключение делается только для уравнений гиперболического типа.

Рассмотрим приведение уравнения (3.1) к каноническому типу в том случае, когда оно имеет параболический тип

($b^2 - ac = 0$). Без ограничения общности можно считать, что $a \neq 0$. В самом деле, если $a = 0$, то из равенства $b^2 - ac = 0$ следует, что $b = 0$, но тогда $c \neq 0$ и, разделив исходное уравнение на c, получим уравнение в канонической форме.

В параболическом случае оба уравнения в (3.10) фактически совпадают и имеем одно уравнение

$$a\,\xi_x + b\,\xi_y = 0, \tag{3.17}$$

из которого можно найти решение $\xi(x,y)$ с $\xi_x^2 + \xi_y^2 \neq 0$. Покажем, что в качестве второй переменной $\eta(x,y)$ можно взять любую функцию, удовлетворяющую условию

$$\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)} \neq 0.$$

Прежде всего отметим, что такие функции существуют. Например, если $\xi_x \neq 0$, то подходит $\eta(x,y) = y$, так как

$$\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \xi_x \neq 0.$$

Если же $\xi_y \neq 0$, то можно выбрать $\eta(x,y) = x$ и тогда

$$\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\xi_y \neq 0.$$

Из уравнения (3.17) следует, что функция $\varphi = \xi$ является решением характеристического уравнения, следовательно,

$$a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_y^2 = 0,$$

что в соответствии с формулами (3.6) означает, что $\widetilde{a} = 0$. Преобразуем выражения для $\widetilde{b}$. Учитывая (3.17), находим

$$\widetilde{b} = a\,\xi_x\eta_x + b\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\,\xi_y\eta_y =$$

$$= (a\,\xi_x\eta_x + b\,\xi_y\eta_x) + (b\,\xi_x\eta_y + c\,\xi_y\eta_y) =$$

$$= (a\,\xi_x + b\,\xi_y)\eta_x + (b\,\xi_x + c\,\xi_y)\eta_y = (b\,\xi_x + c\,\xi_y)\eta_y.$$

Так как предполагаем, что $a \neq 0$, то из условия параболичности $b^2 - ac = 0$ находим $c = b^2/a$ и поэтому в силу (3.17)

$$b\,\xi_x + c\,\xi_y = b\,\xi_x + \frac{b^2}{a}\,\xi_y = \frac{b}{a}(a\,\xi_x + b\,\xi_y) = 0.$$

Таким образом, в уравнении (3.5) $\widetilde{a} = 0$ и $\widetilde{b} = 0$. Покажем, что $\widetilde{c} \neq 0$. Допустим противное: $\widetilde{c} = 0$. Величина $\widetilde{c}$ определяется равенством (3.6). Учитывая, что $c = b^2/a$, получаем

$$\widetilde{c} = a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2 = (a\,\eta_x^2 + b\,\eta_x\eta_y) + (b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2) =$$

$$= (a\,\eta_x + b\,\eta_y)\eta_x + (b\,\eta_x + c\,\eta_y)\eta_y =$$

$$= (a\,\eta_x + b\,\eta_y)\eta_x + \left(b\,\eta_x + \frac{b^2}{a}\,\eta_y\right)\eta_y =$$

$$= (a\,\eta_x + b\,\eta_y)\eta_x + \frac{b}{a}\,(a\,\eta_x + b\,\eta_y)\eta_y =$$

$$= (a\,\eta_x + b\,\eta_y)\left(\eta_x + \frac{b}{a}\,\eta_y\right) = \frac{1}{a}(a\,\eta_x + b\,\eta_y)^2.$$

Так как $\widetilde{c} = 0$, то

$$a\,\eta_x + b\,\eta_y = 0.$$

Преобразуем якобиан функций ξ и η, используя свойства определителей

$$\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a\,\xi_x & \xi_y \\ a\,\eta_x & \eta_y \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a\,\xi_x + b\,\xi_y & \xi_y \\ a\,\eta_x + b\,\eta_y & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0 & \xi_y \\ 0 & \eta_y \end{vmatrix} = 0.$$

Получили противоречие с тем, что этот якобиан отличен от нуля. Следовательно, наше предположение неверно и $\widetilde{c} \neq 0$. Разделив уравнение (3.5), в котором $\widetilde{a} = 0$ и $\widetilde{b} = 0$ на $\widetilde{c}$, получим параболическое уравнение в каноническом виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{F}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta) = 0,$$

где $\widetilde{F} = \widetilde{f}/\widetilde{c}$.

Рассмотрим приведение к каноническому виду эллиптического уравнения, для которого $b^2 - ac < 0$. В этом случае из (3.9) получаем уравнения с комплексными коэффициентами:

$$a\varphi_x + (b \pm i\sqrt{ac - b^2})\varphi_y = 0.$$

Теория решения уравнения (3.12) переносится и на уравнения с комплексными коэффициентами $A(x, y)$, $B(x, y)$. Первые интегралы (комплекснозначные) уравнения (3.13) совпадают с решениями уравнения (3.12). Если функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, причем всюду $|A|^2 + |B|^2 \neq 0$, то уравнение (3.12), по крайней мере локально, имеет непрерывно дифференцируемое решение $\varphi(x, y)$, для которого $|\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \neq 0$.

Для определения замены, приводящей уравнение (3.1) к каноническому виду, достаточно рассмотреть одно этих уравнений. Выберем, например, уравнение

$$a\varphi_x + (b + i\sqrt{ac - b^2})\varphi_y = 0 \tag{3.18}$$

(второе уравнение будет иметь комплексно-сопряженные решения). Покажем, что вещественная и мнимая части решения уравнения (3.18), удовлестворяющего условию $|\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \neq 0$, дают искомые переменные, в которых уравнение имеет канонический вид. Пусть

$$\varphi(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y). \tag{3.19}$$

Функция, удовлетворяющая уравнению (3.18), является также и решением уравнения (3.9). Подставляя (3.19) в (3.9), получаем

$$a\,(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2b\,(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + c\,(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0.$$

Выполняя арифметические действия и отделяя вещественную и мнимую части, приходим к двум равенствам

$$a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\,\xi_y + c\,\xi_y^2 = a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\,\eta_y + c\,\eta_y^2, \tag{3.20}$$

$$2(a\,\xi_x\eta_x + b\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\,\xi_y\eta_y) = 0. \tag{3.21}$$

Сравнивая это с формулами (3.6) видим, что

$$\begin{aligned} \widetilde{a} &= \widetilde{c}, \\ \widetilde{b} &= 0. \end{aligned}$$

Для эллиптического уравнения $\widetilde{b}^2 - \widetilde{a}\widetilde{c} < 0$, откуда следует, что ни $\widetilde{a}$, ни $\widetilde{c}$ не могут быть равны нулю (иначе получится, что $\widetilde{b}^2 < 0$). Разделив уравнение (3.5), в котором $\widetilde{b} = 0$, на общее значение $\widetilde{a} = \widetilde{c}$, получим каноническое уравнение эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{F}(\xi, \eta, u, \partial u/\partial \xi, \partial u/\partial \eta) = 0,$$

в котором $\widetilde{F} = \widetilde{f}/\widetilde{a}$.

Уделим теперь время якобиану преобразования (3.2). Перейдя в уравнении (3.18) к комплексно-сопряженным величинам, получим для сопряженной функции $\overline{\varphi}$ уравнение

$$a\overline{\varphi}_x + (b - i\sqrt{ac - b^2})\overline{\varphi}_y = 0. \tag{3.22}$$

Коэффициенты уравнений (3.18) и (3.22) не пропорциональны, так как

$$\begin{vmatrix} a & b+i\sqrt{ac-b^2} \\ a & b-i\sqrt{ac-b^2} \end{vmatrix} = -2ai\sqrt{ac-b^2} \neq 0.$$

Следовательно, якобиан

$$\frac{\mathcal{D}(\varphi,\overline{\varphi})}{\mathcal{D}(x,y)} \neq 0.$$

Из равенств $\varphi = \xi + i\eta$, $\overline{\varphi} = \xi - i\eta$ находим

$$\xi = \frac{1}{2}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\overline{\varphi}, \quad \eta = \frac{1}{2}\,\varphi - \frac{1}{2}\,\overline{\varphi},$$

откуда получаем

$$\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(\varphi,\overline{\varphi})} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ & \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Свойство произведения якобианов распространяется и на комплекснозначные отображения, поэтому

$$\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)} = \frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(\varphi,\overline{\varphi})} \cdot \frac{\mathcal{D}(\varphi,\overline{\varphi})}{\mathcal{D}(x,y)} \neq 0.$$

Этим заканчивается рассмотрение эллиптического случая.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0.$$

Коэффициенты уравнения $a = 1$, $b = 0$, $c = -(1+y^2)^2$. Величина

$$b^2 - ac = (1+y^2)^2 > 0$$

так, что имеем гиперболический случай. Система уравнений (3.10) принимает следующий вид

$$\begin{cases} \xi_x - (1+y^2)\xi_y = 0; \\ \eta_x + (1+y^2)\eta_y = 0. \end{cases}$$

Уравнение (3.13) для первого из них

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-(1+y^2)}$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, находим первый интеграл

$$x + \operatorname{arctg} y = \mathrm{const}.$$

Следовательно, в качестве решения первого уравнения можно взять $\xi = x + \operatorname{arctg} y$. Для второго уравнения системы уравнение (3.13) имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

Решая его, находим

$$x - \operatorname{arctg} y = \mathrm{const}.$$

Поэтому в качестве решения второго уравнения системы можно взять $\eta = x - \operatorname{arctg} y$. Таким образом, искомая замена дается формулами

$$\begin{cases} \xi = x + \operatorname{arctg} y; \\ \eta = x - \operatorname{arctg} y. \end{cases}$$

Вычисляя производные функций ξ и η, находим

$$\xi_x = 1, \quad \xi_y = \frac{1}{1+y^2}, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_y = -\frac{1}{1+y^2},$$

$$\xi_{xx} = 0, \quad \xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

$$\eta_{xx} = 0, \quad \eta_{xy} = 0, \quad \eta_{yy} = \frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

По формулам (3.3) и (3.4) получаем

$$u_y = \frac{u_\xi - u_\eta}{1+y^2},$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = \frac{u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 2yu_\xi + 2yu_\eta}{(1+y^2)^2}.$$

Подставляя это в исходное уравнение и выполняя тождественные преобразования, имеем

$$(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})-(1+y^2)^2\left(\frac{u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 2yu_\xi + 2yu_\eta}{(1+y^2)^2}\right)-$$

$$-2y(1+y^2)\left(\frac{u_\xi - u_\eta}{1+y^2}\right) = 0,$$

$$(4u_{\xi\eta} + 2yu_\xi - 2yu_\eta) - 2y(u_\xi - u_\eta) = 0,$$

$$4u_{\xi\eta} = 0.$$

Разделив последнее уравнение на четыре, получим каноническое уравнение гиперболического типа

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение

$$y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$$

Здесь $a = y^2$, $b = xy$, $c = x^2$. Величина

$$b^2 - ac = 0$$

так, что в данном примере уравнение имеет параболический тип. Характристическое уравнение (3.17)

$$y^2\xi_x + xy\xi_y = 0$$

после деления на y приводится к виду

$$y\xi_x + x\xi_y = 0.$$

Уравнение характеристик (3.13)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Решая уравнение, находим первый интеграл

$$x^2 - y^2 = \mathrm{const},$$

что дает $\xi = x^2 - y^2$. Вторую переменную можно выбрать по своему усмотрению. Пусть, например, $\eta = y$. Так получаем следующую замену

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2; \\ \eta = y. \end{cases}$$

Далее вычисляем производные функций ξ и η:

$$\xi_x = 2x, \quad \xi_y = -2y, \quad \eta_x = 0, \quad \eta_y = 1,$$

$$\xi_{xx} = 2, \quad \xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = -2,$$

$$\eta_{xx} = 0, \quad \eta_{xy} = 0, \quad \eta_{yy} = 0.$$

По формулам (3.4)

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 4x^2u_{\xi\xi} + 2u_\xi, \\ u_{xy} &= -4xyu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta}, \\ u_{yy} &= 4y^2u_{\xi\xi} - 4yu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 2u_\xi. \end{aligned}$$

Подставляя вычисленные производные в исходное уравнение и приводя подобные члены, получаем

$$x^2 u_{\eta\eta} + 2(y^2 - x^2)u_\xi = 0.$$

Из формул замены находим $y = \eta$, $x^2 = \xi + y^2 = \xi + \eta^2$, поэтому последнее уравнение можно переписать в следующем виде:

$$(\xi + \eta^2)u_{\eta\eta} - 2\xi u_\xi = 0.$$

Разделив обе части равенства на $\xi + \eta^2$, получаем каноническое уравнение параболического типа

$$u_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\xi + \eta^2}\, u_\xi = 0.$$

Пример 3.3. Рассмотрим уравнение

$$(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0.$$

В этом примере $a = (1 + x^2)^2$, $b = 0$, $c = 1$. Величина

$$b^2 - ac = -(1 + x^2)^2 < 0,$$

что определяет уравнение эллиптического типа. Здесь имеем пару комплексно-сопряженных характеристических уравнений

$$(1 + x^2)^2 \varphi_x \pm i(1 + x^2)\varphi_y = 0.$$

Сокращая на $1 + x^2$, получим

$$(1 + x^2)\varphi_x \pm i\varphi_y = 0.$$

Уравнение характеристик

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{\pm i}$$

представляет уравнение с разделяющимися переменными, решая это уравнение, находим первые интегралы

$$\operatorname{arctg} x \pm iy = \text{const}.$$

Вещественная и мнимая части этих интегралов дают искомую замену

$$\begin{cases} \xi = \operatorname{arctg} x; \\ \eta = y. \end{cases}$$

Производные функций ξ и η:

$$\xi_x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \xi_y = 0, \quad \eta_x = 0, \quad \eta_y = 1,$$

$$\xi_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_{xx} = 0, \quad \eta_{xy} = 0, \quad \eta_{yy} = 0.$$

По формулам (3.3) и (3.4)

$$\begin{aligned} &u_x = \frac{u_\xi}{1+x^2}, \\ &u_{xx} = \frac{u_{\xi\xi} - 2xu_\xi}{(1+x^2)^2}, \\ &u_{yy} = u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в исходное уравнение, получаем

$$(1+x^2)^2 \frac{(u_{\xi\xi} - 2xu_\xi)}{(1+x^2)^2} + u_{\eta\eta} + 2x(1+x^2)\frac{u_\xi}{1+x^2} = 0.$$

После тождественных преобразований получаем каноническое уравнение эллиптического типа

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

Пример 3.4. Рассмотрим уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

В этом примере $a = y$, $b = 0$, $c = 1$. Величина

$$b^2 - ac = -y.$$

Знак дискриминанта $b^2 - ac$ зависит от y. Так как при $y = 0$ уравнение имеет канонический вид параболического уравнения, то достаточно рассмотреть два случая: $y > 0$ и $y < 0$.

Первый случай: $y > 0$. Здесь имеем уравнение эллиптического типа. Харатеристическое уравнение

$$\varphi_x \pm \frac{i}{\sqrt{y}}\,\varphi_y = 0.$$

Уравнение характеристик

$$dx = \frac{\sqrt{y}\,dy}{\pm i}$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Первые интегралы:

$$x \pm i\frac{2}{3}\,y\sqrt{y} = \text{const}.$$

Замена переменных, приводящая уравнение к каноническому виду,

$$\begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \dfrac{2}{3}\,y\sqrt{y}. \end{cases}$$

По формулам (3.4)

$$u_{xx} = u_{\xi\xi},$$

$$u_{yy} = yu_{\eta\eta} + \frac{u_\eta}{2\sqrt{y}}.$$

После небольших тождественных преобразований, деления на y и замены $y\sqrt{y}$ на $3\eta/2$, получаем каноническое уравнение

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_\eta}{3\eta} = 0.$$

Второй случай: $y < 0$ (гиперболическое уравнение). Харатеристическое уравнение

$$\varphi_x \pm \frac{1}{\sqrt{-y}}\,\varphi_y = 0.$$

Уравнение характеристик

$$dx = \pm\sqrt{-y}\,dy.$$

Первые интегралы:

$$x \pm \frac{2}{3}\,y\sqrt{-y} = \mathrm{const}.$$

Замена переменных:

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{2}{3}\,y\sqrt{-y}; \\ \eta = x + \dfrac{2}{3}\,y\sqrt{-y}. \end{cases}$$

Формулы пересчета производных:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = -yu_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} - yu_{\eta\eta} + \frac{u_\xi - u_\eta}{2\sqrt{-y}}.$$

После тождественных преобразований получаем каноническое уравнение

$$u_{\xi\eta} + \frac{u_\xi - u_\eta}{8(\eta - \xi)} = 0.$$

Список рекомендуемой литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: МГУ, 1999.

2. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.

3. Бицадзе А.В, Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.

4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2003.

Редактор М. В. Макарова

Подписано в печать 19.06.2009. Формат 60x84 1/16.
Печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,25. Тираж 200 экз.
Изд. N 015 – 1. Заказ N

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31